

5. cvičení - řešení

Příklad 1 (a)

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \sqrt[3]{n^3 + n^2} - n \sqrt[3]{8^n + 1}}{\sqrt[n]{2^{n^2} + 1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \left(\sqrt[3]{n^3 + n^2} - n \sqrt[3]{1 + \frac{1}{8^n}} \right)}{2^n \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2^{n^2}}}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + n^2} - n \sqrt[3]{1 + \frac{1}{8^n}}}{\sqrt[n]{1 + \frac{1}{2^{n^2}}}} \cdot \frac{\sqrt[3]{(n^3 + n^2)^2} + \sqrt[3]{n^3 + n^2} \cdot n \sqrt[3]{1 + \frac{1}{8^n}} + n^2 \sqrt[3]{(1 + \frac{1}{8^n})^2}}{\sqrt[3]{(n^3 + n^2)^2} + \sqrt[3]{n^3 + n^2} \cdot n \sqrt[3]{1 + \frac{1}{8^n}} + n^2 \sqrt[3]{(1 + \frac{1}{8^n})^2}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n^2 - n^3 - \frac{n^3}{8^n}}{n \sqrt[3]{1 + \frac{1}{2^{n^2}}} \cdot n^2 \cdot \left(\sqrt[3]{(1 + \frac{1}{n})^2} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{1}{8^n}} + \sqrt[3]{(1 + \frac{1}{8^n})^2} \right)} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{n}{8^n}}{n \sqrt[3]{1 + \frac{1}{2^{n^2}}} \cdot \left(\sqrt[3]{(1 + \frac{1}{n})^2} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{1}{8^n}} + \sqrt[3]{(1 + \frac{1}{8^n})^2} \right)} \stackrel{\text{VoAL}}{=} \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Poslední rovnost jsme získali díky opakovanému použití věty o dvou strážnících na výrazy

$$\begin{aligned}
 c_n &= \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2^{n^2}}}, \\
 d_n &= \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{1}{8^n}} + \sqrt[3]{(1 + \frac{1}{8^n})^2}.
 \end{aligned}$$

Pak máme

$$\begin{aligned}
 \sqrt[n]{1} &\leq c_n \leq \sqrt[n]{2} \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1.
 \end{aligned}$$

Dále máme

$$\begin{aligned}
 \sqrt[3]{(1)^2} + \sqrt[3]{1} \cdot \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{(1)^2} &\leq d_n \leq 3 \cdot \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{(1)^2} + \sqrt[3]{1} \cdot \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{(1)^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} \stackrel{\text{VoAL}}{=} \text{o posl. s kladnými členy } 3
 \end{aligned}$$

Příklad 1 (b)

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + \sqrt{n} + 1} - \sqrt{n^2 + 2\sqrt{n} + 3} \right) \frac{\sqrt[n]{n + n^n}}{[\sqrt{n + 2}]} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sqrt{n} + 1 - (n^2 + 2\sqrt{n} + 3)}{\sqrt{n^2 + \sqrt{n} + 1} + \sqrt{n^2 + 2\sqrt{n} + 3}} \frac{\sqrt[n]{n + n^n}}{[\sqrt{n + 2}]} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\sqrt{n} - 2}{\sqrt{n^2 + \sqrt{n} + 1} + \sqrt{n^2 + 2\sqrt{n} + 3}} \frac{\sqrt[n]{n + n^n}}{[\sqrt{n + 2}]} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} \frac{-1 - \frac{2}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n\sqrt{n}} + \frac{3}{n^2}}} \frac{\sqrt[n]{n + n^n}}{[\sqrt{n + 2}]} \\
&\stackrel{\text{VoAL} + \text{o posl. s kladnými členy}}{=} -\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} \frac{\sqrt[n]{n + n^n}}{[\sqrt{n + 2}]} \stackrel{\text{VoAL}}{=} -\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{[\sqrt{n + 2}]} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n + n^n}}{n} = (*)
\end{aligned}$$

Platí

$$\sqrt{n} - 1 \leq [\sqrt{n}] \leq [\sqrt{n + 2}] \leq \sqrt{n + 2},$$

a tedy

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n + 2}} \leq \frac{\sqrt{n}}{[\sqrt{n + 2}]} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} - 1}.$$

Zároveň

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n + 2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}}} \stackrel{\text{VoAL}}{=} 1$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}} \stackrel{\text{AL}}{=} 1.$$

Z Věty o dvou policajtech pak platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{[\sqrt{n + 2}]} = 1$. Dále platí

$$1 = \frac{\sqrt[n]{n^n}}{n} \leq \frac{\sqrt[n]{n^n + n}}{n} \leq \frac{\sqrt[n]{2n^n}}{n} = \sqrt[n]{2}$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2}.$$

Opět použitím Věty o dvou policajtech dostáváme

$$(*) = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = -\frac{1}{2}$$

Příklad 1 (c)

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{2n+a} - \sqrt[3]{2n+b} \right) \cdot \sqrt[3]{(n+1)(3n+2)} = \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{(n+1)(3n+2)} \left(\sqrt[3]{2n+a} - \sqrt[3]{2n+b} \right) \cdot \frac{(\sqrt[3]{2n+a})^2 + \sqrt[3]{2n+a} \cdot \sqrt[3]{2n+b} + (\sqrt[3]{2n+b})^2}{(\sqrt[3]{2n+a})^2 + \sqrt[3]{2n+a} \cdot \sqrt[3]{2n+b} + (\sqrt[3]{2n+b})^2} = \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((2n+a) - (2n+b)) \cdot \sqrt[3]{(n+1)(3n+2)}}{(\sqrt[3]{2n+a})^2 + \sqrt[3]{2n+a} \cdot \sqrt[3]{2n+b} + (\sqrt[3]{2n+b})^2} = \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a-b)n^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{(1+\frac{1}{n})(3+\frac{2}{n})}}{n^{\frac{2}{3}} \left(\sqrt[3]{2+\frac{a}{n}}^2 + \sqrt[3]{2+\frac{a}{n}} \cdot \sqrt[3]{2+\frac{b}{n}} + (\sqrt[3]{2+\frac{b}{n}})^2 \right)} \stackrel{\text{VoAL}}{=} \frac{(a-b) \cdot \sqrt[3]{3}}{3 \cdot 2^{\frac{2}{3}}} = (a-b) \cdot 6^{-\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

Použili jsme vzorec

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \dots + A^2B^{n-3} + AB^{n-2} + B^{n-1}).$$

Příklad 1 (d) Pro $k \in \mathbb{N}$ označme $P_{\leq k}(n)$ polynom proměnné n stupně nejvýše k .

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+1)^{100} - (n+2)^{200} + 400n^{199}}{1+2+\dots+n^{99}} \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{200} + 100n^{198} + P_{\leq 196}(n) - n^{200} - 400n^{199} - 4 \cdot \binom{200}{2}n^{198} - P_{\leq 197}(n) + 400n^{199}}{\frac{n^{99}(n^{99}+1)}{2}} \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{198}(100 - 79600 + \frac{P_{\leq 197}(n)}{n^{198}})}{n^{198}(\frac{1}{2} + \frac{1}{n^{99}})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100 - 79600 + \frac{P_{\leq 197}(n)}{n^{198}}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{n^{99}}} \stackrel{\text{VoAL}}{=} -159000.
\end{aligned}$$

Příklad 1 (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 (\sqrt[3]{n!+3^n} - \sqrt[3]{n!+2^n})$

Použijeme vzorec $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\sqrt[3]{n!+3^n} - \sqrt[3]{n!+2^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \cdot \frac{n!+3^n - (n!+2^n)}{(n!+3^n)^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{(n!+3^n)(n!+2^n)} + (n!+2^n)^{\frac{2}{3}}} = \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3(3^n - 2^n)}{(n!+3^n)^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{(n!+3^n)(n!+2^n)} + (n!+2^n)^{\frac{2}{3}}}
\end{aligned}$$

Zeshora i zdola vytkneme nejsilnější člen dle růstové škály - tedy nahoře 3^n a dole zvnitřku $n!$.

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3(3^n - 2^n)}{(n!+3^n)^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{(n!+3^n)(n!+2^n)} + (n!+2^n)^{\frac{2}{3}}} = \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \cdot n^3}{(n!)^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{1 - \frac{2^n}{3^n}}{\left(1 + \frac{3^n}{n!}\right)^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{\left(1 + \frac{3^n}{n!}\right)\left(1 + \frac{2^n}{n!}\right)} + \left(1 + \frac{2^n}{n!}\right)^{\frac{2}{3}}}
\end{aligned}$$

Přičemž platí od určitého $n_0 \in \mathbb{N}$ (neb $n^3 \ll 3^n$):

$$0 \leq \frac{3^n \cdot n^3}{(n!)^{\frac{2}{3}}} \leq \frac{3^n \cdot 3^n}{(n!)^{\frac{2}{3}}} = \frac{9^n}{(n!)^{\frac{2}{3}}} = \frac{\left((9^n)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}}{(n!)^{\frac{2}{3}}} = \frac{\left(\left(9^{\frac{3}{2}}\right)^n\right)^{\frac{2}{3}}}{(n!)^{\frac{2}{3}}} = \left(\frac{27^n}{n!}\right)^{\frac{2}{3}} \text{ r.š. } + \text{ o posl. } \xrightarrow{s} \text{ kladnými členy } 0$$

Ze dvou strážníků tedy plyne, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \cdot n^3}{(n!)^{\frac{2}{3}}} = 0$. Pak platí:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \cdot n^3}{(n!)^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{1 - \frac{2^n}{3^n}}{\left(1 + \frac{3^n}{n!}\right)^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{\left(1 + \frac{3^n}{n!}\right)\left(1 + \frac{2^n}{n!}\right)} + \left(1 + \frac{2^n}{n!}\right)^{\frac{2}{3}}} = \\ & \stackrel{\text{VoAL}}{=} 0 \cdot \frac{1 - 0}{(1 + 0)^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{(1 + 0)(1 + 0)} + (1 + 0)^{\frac{2}{3}}} = 0 \end{aligned}$$

Příklad 1 (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + \sin n)^7 - (n + \sqrt{n})^7}{n^2 \sqrt{n^7 + 7}} \cdot \arctan \frac{1}{n}$

Poznámka: $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \arctan \frac{1}{n} = 1$ plyne z Heineho věty, známé limity a věty o limitě složené funkce (vše bude probíráno v rámci limit funkcí).

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + \sin n)^7 - (n + \sqrt{n})^7}{n^2 \sqrt{n^7 + 7}} \cdot \arctan \frac{1}{n} = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^6 \binom{7}{k} n^k \left((\sin n)^{7-k} - (\sqrt{n})^{7-k} \right)}{n^{2+\frac{7}{2}} \sqrt{1 + \frac{7}{n^7}}} \cdot \arctan \frac{1}{n} = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6 \sum_{k=0}^6 \binom{7}{k} n^{k-6} \left((\sin n)^{7-k} - (\sqrt{n})^{7-k} \right)}{n^{2+\frac{7}{2}} \sqrt{1 + \frac{7}{n^7}}} \cdot \arctan \frac{1}{n} = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^6 \binom{7}{k} n^{k-6} \left((\sin n)^{7-k} - (\sqrt{n})^{7-k} \right)}{\sqrt{1 + \frac{7}{n^7}}} \cdot \arctan \frac{1}{n} = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^6 \binom{7}{k} n^{k-5-\frac{1}{2}} \left((\sin n)^{7-k} - (\sqrt{n})^{7-k} \right)}{\sqrt{1 + \frac{7}{n^7}}} \cdot \arctan \frac{1}{n} = \\ & \stackrel{\text{VoAL}}{=} \frac{1}{1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^6 \binom{7}{k} n^{k-5-\frac{1}{2}} \left((\sin n)^{7-k} - (\sqrt{n})^{7-k} \right) \cdot \arctan \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Přičemž platí, že $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{k-5-\frac{1}{2}} (\sin n)^{7-k} \cdot \arctan \frac{1}{n} = 0$ pro $k-5-\frac{1}{2} < 0$ (limita typu 0·om.). Tedy pro $k = 6$ musíme příslušný sčítanec v počítané limitě nechat. Podobně $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{k-5-\frac{1}{2}} \cdot (\sqrt{n})^{7-k} \cdot \arctan \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{k-5-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}-\frac{k}{2}} \cdot \arctan \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{k}{2}-2} \cdot \arctan \frac{1}{n} = 0$ pro $\frac{k}{2} - 2 < 0$. Pro zbylá k - tj. pro $k \in \{5, 6\}$ musíme vyřešit zvlášť.

Dostáváme tedy, že:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^6 \binom{7}{k} n^{k-5-\frac{1}{2}} \left((\sin n)^{7-k} - (\sqrt{n})^{7-k} \right) \cdot \arctan \frac{1}{n} = \\ & \stackrel{\text{VoAL}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\binom{7}{6} \sqrt{n} \sin n - \binom{7}{5} \sqrt{n} - \binom{7}{6} n \right) \cdot \arctan \frac{1}{n} = \\ & \stackrel{\text{VoAL}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(7 \frac{\sin n}{\sqrt{n}} - 21 \frac{1}{\sqrt{n}} - 7 \right) \cdot n \cdot \arctan \frac{1}{n} \stackrel{\text{VoAL}}{=} (7 \cdot 0 - 21 \cdot 0 - 7) \cdot 1 = -7 \end{aligned}$$

Poslední rovnost plyne z věty o limitě typu nula krát omezená a faktu, že $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \arctan \frac{1}{n} = 1$.

Příklad 1 (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{3^n + 2^n} - \sqrt[3]{3^n + n}) \cdot \left(\frac{3^n + 2^n}{3^n + n} + (-1)^n n^2 \right)$

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{3^n + 2^n} - \sqrt[3]{3^n + n}) \cdot \left(\frac{3^n + 2^n}{3^n + n} + (-1)^n n^2 \right) = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 2^n - 3^n - n}{(\sqrt[3]{3^n + 2^n})^2 + \sqrt[3]{(3^n + 2^n)(3^n + n)} + (\sqrt[3]{3^n + n})^2} \cdot \left(\frac{3^n (1 + (\frac{2}{3})^n)}{3^n (1 + \frac{n}{3^n})} + (-1)^n n^2 \right) = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n (1 - \frac{n}{2^n})}{\left(\left(\sqrt[3]{1 + (\frac{2}{3})^n} \right)^2 + \sqrt[3]{(1 + (\frac{2}{3})^n)(1 + \frac{n}{3^n})} + \left(\sqrt[3]{1 + \frac{n}{3^n}} \right)^2 \right)} \cdot \left(\frac{1 + (\frac{2}{3})^n}{1 + \frac{n}{3^n}} + (-1)^n n^2 \right) = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\sqrt[3]{9}} \right)^n \frac{1 - \frac{n}{2^n}}{\left(\sqrt[3]{1 + (\frac{2}{3})^n} \right)^2 + \sqrt[3]{(1 + (\frac{2}{3})^n)(1 + \frac{n}{3^n})} + \left(\sqrt[3]{1 + \frac{n}{3^n}} \right)^2} \cdot \left(\frac{1 + (\frac{2}{3})^n}{1 + \frac{n}{3^n}} + (-1)^n n^2 \right) = \\
& \text{VoAL}_{\equiv+ \text{ r.š.}} \frac{1 - 0}{1 + 1 + 1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\sqrt[3]{9}} \right)^n \cdot \left(\frac{1 + (\frac{2}{3})^n}{1 + \frac{n}{3^n}} + (-1)^n n^2 \right) = \\
& \text{VoAL}_{\equiv+ \text{ r.š.}} \frac{1}{3} \cdot \left(0 \cdot \frac{1 + 0}{1 + 0} + \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n^2}{\left(\frac{\sqrt[3]{9}}{2} \right)^n} \right) \text{VoAL}_{\equiv+ \text{ r.š.}} 0
\end{aligned}$$

Neb: $\sqrt[3]{9} > 2$, tedy $\frac{\sqrt[3]{9}}{2} > 1$.

Příklad 2

Vzorové řešení doc. Johanise. (odkaz)